Questions / Note	Scope	Page
	# Processi Aleatori T.D.	

Funzioni statistiche derivate

Funzioni statistiche derivate dalla funzione di densità di probabilità e sono
- media
- potenza
- varianza

Processo stazionario

Nei processi stazionari le variabili aleatorie sono indipendenti dalla scelta dell'origine sull'asse temporale.
- in una variabile $\int dd_x(x) = \int dd(x+k)$
- in due variabili $\int dd_{xy}(x,y) = \int dd_{xy}(x+k, y+m)$

} significa che tutte le v.a. hanno la stessa probabilità e che la densità di probabilità dipende dal salto

Inoltre le funzioni statistiche derivate sono costanti.

Processo ergodico

E' un tipo di processo stazionario in cui per la conoscenza delle grandezze derivate non è necessario disporre di "infinite" realizzazioni come nei processi stazionari in senso lato o meno ma di una o poche realizzazioni. Quando da una realizzazione sufficientemente lunga si ottengono alcune grandezze statistiche di maggior interesse si parla di medie temporali.

PROCESSO ERGODICO NELLA MEDIA $\lim_{M\to\infty} \langle x_n \rangle_M = \underbrace{\lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^{M} x[n]}_{\text{media temporale}} = E[x_n] = m_x$

PROCESSO ERGODICO NELL'AUTOCORRELAZIONE $\lim_{M\to\infty} \langle x_n, x_{n+m} \rangle_M = \underbrace{\lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^{M} x[n]x[n+m]}_{\text{medie temporale}} = R_{xx}[m]$

Processo WSS

Conosciuto anche come processo bianco caratterizzato da:
1) media costante
2) potenza costante
3) l'autocorrelazione dipende solo dal campione

Autocovarianza / Autocorrelazione

AUTOCOVARIANZA: è una misura lineare della dipendenza di due campioni di una serie separati da un certo "lag" $C_{xx}[m] = E[(x_n - \mu)(x_{n+m} - \mu)] = \sum_{n=-\infty} (x[n] - \mu_x)(x[n+m] - \mu_x)$

AUTOCORRELAZIONE: E' un modo per confrontare una sequenza con se stessa
$R_{xx}[m] = E[x_n, x_{n+m}] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]x[n+m]$

[20, 22, 20, 25]	originale
[20, 22, 20, 25]	$x[n-0]$
[22, 20, 25]	$x[n-1]$
[20, 25]	$x[n-2]$
[25]	$x[x-3]$

l'esempio di fianco mostra come funziona R_{xx}. Per $m=0$ $\sum x^2[n]$ = definizione di potenza. $m=1$ $\sum x[n] x[n+1]$ e così via.

Prop. Autocorrelazione/ Autocovarianza

Di seguito alcune proprietà delle funzioni di autocorrelazione e autocovarianza.
R_{xx} = autocorrelazione C_{xx} = autocovarianza

1) media nulla	$R_{xx}[0] = E[x_n^2] = P_x$	$C_{xx}[0] = E[(x_n - m_x)^2] = \sigma_x^2$ ②
2) Relazione R_{xx}/C_{xx}	$R_{xx}[m] = C_{xx}[m] + m_x^2$	$C_{xx}[m] = R_{xx}[m] - m_x^2$
3) simmetria	$R_{xx}[-m] = R_{xx}[m]$	$C_{xx}[-m] = C_{xx}[m]$
4) valore massimo	$\lvert R_{xx}[m] \rvert \le R_{xx}[0]$	$\lvert C_{xx}[m] \rvert \le C_{xx}[0]$
5) lunga distanza	$E[x_n, x_{n+m}] \simeq E[x_n] E[x_{n+m}]$ ① per $m \to \infty$ si considerano indip.	
6) conseguenze della 5	$R_{xx}[m] = m_x^2$	$C_{xx}[m] = 0$

① vds teoria delle probabilità indip. $P(A \cap B) \neq \emptyset \Rightarrow P(A) \cdot P(B)$ / ② Varianza: misura la dispersione rispetto alla media.

Conclusioni Per i segnali il "lag" della definizione di Autocovarianza e autocorrelazione è sostituito dalla grandezza statistica della media e dunque si capisce perché segnali a media nulla, nel lungo periodo, sono importanti: perché possono essere considerati come segnali deterministici.

Scope

Questions / Note

Applicazione pratica delle proprietà di un proc. WSS

Page

Densità spettrale di potenza

E' definita come la TDF della funzione di autocorrelazione $S_{xx}(F)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{xx}[m]\, e^{-j2\pi Fm}$

Convergenza: per la proprietà 6) $R_{xx}[m]$ non tende a 0 e dunque la $P_{xx}(F)$ non converge né in senso uniforme né in senso quadratico medio.
La dimostrazione di questa affermazione la si ha osservando che:

$$S_{xx}(F)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{xx}[m]\, e^{-j2\pi Fm}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(C_{xx}[m]+m_x^2\right) e^{-j2\pi Fm} =$$

$\Rightarrow$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{xx}[m]\, e^{-j2\pi Fm}+\sum_{m=-\infty}^{\infty} m_x^2\, e^{-j2\pi Fm}=\sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{xx}[m]\, e^{-j2\pi Fm}+m_x^2\,\delta(F)$$

perché sono impodenti i proc. WSS $\Rightarrow$

Conclusioni: alla potenza di un segnale contribuisce una parte impulsiva dovuta alla media ed una parte dovuta alla variabilità del segnale stesso che si annulla per $\boxed{m\to\infty}$ quando il segnale è di tipo WSS.

campioni distanti

Potenza di un segnale

$$\mathcal{F}^{-1}\left[S_{xx}(F)\right]=R_{xx}[m]=\int_{-0.5}^{0.5} S_{xx}(F)\, e^{j2\pi Fm}\, dF \xrightarrow{m=0} R_{xx}[0]=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]^2=\int_{-0.5}^{0.5} S_{xx}(F)\, dF = P_x$$

Conclusioni: quando il "lag" tra due campioni di una sequenza temporale è nullo, la densità spettrale di potenza coincide con la potenza (area sottesa a $S_{xx}(F)$)

Questions / Note	Scope: Funzioni Statistiche in Uscita di un Sistema LTI	Page

Funzioni Statistiche in Uscita di un Sistema LTI

condizione generale per il calcolo dell'uscita. $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\,x[n-k]$

Media di $y[n]$

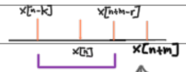
$$E[y[n]] = E\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\,x[n-k]\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\,E[x[n-k]] = E\Big[\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]}_{\text{indip. da } n}\Big]\mu =$$

$$= H(F)\Big|_{F=0}\,\mu \quad \Rightarrow \quad \text{è costante.} \checkmark$$

Autocorrelazione di $y[n]$

$$R_{yy}[n, n+m] = E\big[y[n]\,y[n+m]\big] = E\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\,x[n-k] \sum_{r=-\infty}^{\infty} h[r]\,x[n+m-r]\right] =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{r=-\infty}^{\infty} \underbrace{h[k]\,h[r]}_{\substack{\text{non dipendono da } n \\ \text{posso estrarli da } E}}\; E\Big[\underbrace{x[n-k]\,x[n+m-r]}_{x[n+m-r-n+k] = x[m+k-r]}\Big] = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{r=-\infty}^{\infty} h[k]\,h[r]\,R_{xx}[m+k-r] =$$



la posizione dei campioni è solo indicativa

trasformo l'indice di R_{xx} in una forma standard $\quad m+k-r = m-(r-k) = m-\ell \;\Rightarrow\; r = \ell+k$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} h[k]\,h[k+\ell]\,R_{xx}[m-\ell] = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\Big[\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\,h[k+\ell]}\Big]R_{xx}[m-\ell] = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \underbrace{v(\ell)}\,R_{xx}[m-\ell]$$

Vediamo com'è fatta $v(\ell) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\,h[k+\ell] = h[\ell] * h[-\ell] \longrightarrow \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]\,h[m+\ell]$

posso cambiare l'indice tanto è una var. muta.

$\Rightarrow$ $R_{yy}[m] = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} h[m]\cdot h[m+\ell]\,R_{xx}[m-\ell] = \underbrace{h[m] * h[-m]}_{\text{è una sequenza simmetrica attorno allo } 0} * R_{xx}[m]$ dipende solo da m dunque la tesi è dimostrata.

Densità spettrale di $y[n]$

$$R_{yy}[m] = h[m] * h[-m] * R_{xx}[m] \Rightarrow S_{yy}(F) = H(F)\,H^{c}(F)\,S_{xx}(F) = |H(F)|^2\,S_{xx}(F)$$

La potenza del segnale in uscita dipende da quella d'ingresso che per definizione dipende solo dalla media

Potenza di $y[n]$

$$R_{yy}[m] = \int_{-0.5}^{0.5} S_{yy}(F)\,e^{j2\pi F m}\,dF \Rightarrow R_{yy}[0] = h[0] * h[0] * R_{xx}[0] = \int_{-0.5}^{0.5} |H(F)|^2\,S_{xx}(F)\,dF \simeq 2\Delta F\,S_{xx}(F_0) = P_y$$